一种对称损失函数下正态总体刻度参数的估计*

王忠强　　王德辉
(吉林大学数学研究所, 长春 130012)

宋立新
(大连理工大学应用数学系, 大连 116023)

摘　要　本文研究正态分布中刻度参数在损失函数 $L(\sigma,\delta)=\frac{(\sigma-\delta)^2}{\sigma\delta}$ 下的最小风险同变估计及 Bayes 估计, 并讨论 $(cT(x)+d)^{\frac{1}{2}}$ 形式估计的可容许性与不可容许性, 我们发现在这种损失下 σ 的极大似然估计是不可容许的.

关键词　对称损失函数, 最小风险同变估计, Bayes 估计, 可容许性

1　引言

在参数估计问题中, 我们常见的损失函数有平方损失、绝对值损失. 近年来, 熵损失引起人们的注意. 1996 年 Parsian 和 Nematollahi[1] 探讨了在熵损失函数下, Γ 一分布刻度参数的形如 $cT+d$ 一类线性估计的容许性问题. 王德辉在 [2] 中给出了在熵损失下定数截尾时指数分布的最小风险同变 (MRE) 估计和 Bayes 估计, 讨论了参数 λ 的形如 $1/(cT+d)$ 一类逆线性估计的容许性问题. [3] 讨论了在熵损失函数下, 刻度参数的可容许估计的不变性及 Bayes 估计的不变性. 对称熵损失是在熵损失的基础上提出来的, 它关于参数和估计量具有对称性. [4] 讨论了对称熵损失下指数分布的参数估计问题. 在指数分布下对称熵损失函数的表达式为 $n(\delta/\lambda+\lambda/\delta-2)$.

基于上述, 本文引入损失函数

$$L(\sigma,\delta)=\frac{(\sigma-\delta)^2}{\sigma\delta},$$

即

$$L(\sigma,\delta)=\delta/\sigma+\sigma/\delta-2, \tag{1.1}$$

其中 σ 为待估刻度参数, δ 为其估计量. 显然, 这个损失函数关于参数和估计量具有对称性, 且关于 δ 严格凸的, 在 $\delta=\sigma$ 时, 取最小值 0.

本文 2002 年 5 月 9 日收到. 2003 年 3 月 12 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10271049 号) 资助项目.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态分布总体 $N(0,\sigma^2)$ 容量为 n 的随机样本，则 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合密度为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\Big\},\qquad(\sigma>0).\tag{1.2}$$

在损失函数 (1.1) 下，我们研究正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 刻度参数 σ 的估计，并讨论形如 $(cT(x)+d)^{\frac{1}{2}}$ 一类估计的容许性问题，同时论证了估计量 $\left[\frac{T(X)}{n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$ 是 σ 的最小风险同变 (MRE) 估计，并且它是可容许的，具有 Minimax 性. 在文章的第 2–4 部分给出本文的结论并证明我们的结论. 需要指出的是定理 2.1 不要求总体是正态的.

2　σ 的最小风险同变估计

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自密度为 $\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ 的总体分布的一组样本，显然 σ 是刻度参数，而且在变换群 $G=\{g_c:g_c(x)=cx,\ c>0\}$ 之下，密度函数 $\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ 和损失函数 (1.1) 是不变的.

下面定理给出了刻度参数 σ 的最小风险同变 (MRE) 估计的表达形式.

定理 2.1　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自密度为 $\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ 的分布的一组样本，记

$$Z=(Z_1,\cdots,Z_n),\qquad Z_i=\frac{X_i}{X_n},\qquad i=1,\cdots,n.$$

假定在损失函数 (1.1) 之下存在 σ 的同变估计量 $\delta_0(X)$, 且具有有限风险，那么 σ 的 MRE 估计量为

$$\delta^*(x)=\delta_0\Big/\sqrt{E_1(\delta_0\mid z)/E_1\Big(\frac{1}{\delta_0}\mid z\Big)}.$$

证　由假设 $\delta_0(X)$ 是一刻度同变估计，则任一同变估计 $\delta(X)$ 具有下面形式:

$$\delta(X)=\delta_0(X)/W(Z).$$

$W(Z)$ 为向量 Z 的函数.　$\delta(X)$ 那么对应的风险函数为

$$\begin{aligned}R(\sigma,\delta)=&E_\sigma\Big\{\frac{\delta}{\sigma}+\frac{\sigma}{\delta}-2\Big\}\\=&E_1\Big\{E_1\Big\{\Big[\frac{\delta_0}{W(Z)}+\frac{W(Z)}{\delta_0}-2\Big]\Big|Z\Big\}\Big\},\end{aligned}$$

故只需极小化

$$E_1\Big\{\Big[\frac{\delta_0}{W(Z)}+\frac{W(Z)}{\delta_0}-2\Big]\Big|Z\Big\}$$

即可. 由于

$$E_1\Big\{\Big[\frac{\delta_0}{W(Z)}+\frac{W(Z)}{\delta_0}-2\Big]\Big|Z\Big\}=W(Z)E_1\Big(\frac{1}{\delta_0}\Big|Z\Big)+\frac{1}{W(Z)}E_1\Big(\delta_0|Z\Big)-2.$$

令

$$f(w)=wE_1\Big(\frac{1}{\delta_0}\Big|Z\Big)+\frac{1}{w}E_1(\delta_0|Z)-2.$$

再令 $f'(w)=0$, 解得 $w=\sqrt{E_1(\delta_0\mid z)/E_1(\frac{1}{\delta_0}\mid z)}$.

因此，当 $W(Z)=\sqrt{E_1(\delta_0\mid z)/E_1(\frac{1}{\delta_0}\mid z)}$ 时， $E_1\{[\delta_0/W(Z)+W(Z)/\delta_0-2]|Z\}$ 达到最小，而且 $W(Z)$ 是唯一的最小值点.

于是 σ 的 MRE 估计量为

$$\delta^*(x)=\delta_0/\sqrt{E_1(\delta_0\mid z)/E_1\Big(\frac{1}{\delta_0}\mid z\Big)},$$

且在几乎处处的意义下是唯一的.

下面我们计算正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 刻度参数在损失函数 (1.1) 的最小风险同变估计.

取估计量 $\delta_0=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}$, 则 δ_0 是 σ 的一个同变估计量. 记 $R(X)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}$, 容易计算 $R(X)$ 关于 Z 的条件密度为：

$$g(r|z_1,\cdots,z_{n-1})=\frac{2(\frac{1}{2\sigma^2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}r^{n-1}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}r^2}.$$

进而得到 $W(Z)=\sqrt{n-1}$, 于是 σ 的最小风险同变估计为：

$$\delta^*(x)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

3 估计量 $[cT(X)+d]^{\frac{1}{2}}$ 的容许性

为了下文的应用，我们首先考虑在损失函数 (1.1) 下， σ 的 Bayes 估计.

定理 3.1 在损失函数 (1.1) 之下，对于任一先验分布， σ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(X)=\sqrt{E(\sigma\mid X)/E\Big(\frac{1}{\sigma}\Big|X\Big)},$$

并且若存在 δ', 其 Bayes 风险 $\gamma(\delta')<\infty$ 时， Bayes 估计是唯一的.

证 在损失函数 (1.1) 之下， δ 对应的 Bayes 风险为

$$\gamma(\delta)=EL(\sigma,\delta(X))=E\big(E\big(L(\sigma,\delta(X))\big|X\big)\big).$$

故欲使 $\gamma(\delta)$ 达到最小，只需使 $E\big(L(\sigma,\delta(X))\big|X\big)$ 几乎处处达到最小，当

$$\delta(X)=\sqrt{E(\sigma\mid X)/E(\frac{1}{\sigma}\mid X)}$$

时，上式取得最小值，而且是唯一的最小值点 (证明与定理 2. 1 类似). 从而， $\delta_B(X)=\sqrt{E(\sigma\mid X)/E(\frac{1}{\sigma}\mid X)}$.

如果我们取 σ 的共轭先验分布密度为

$$\pi(\sigma)=2\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}/\Gamma(\frac{\lambda-1}{2})\sigma^{-\lambda}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2}},\qquad \lambda>1,\ \ \alpha>0,$$

则 σ 的后验分布密度为

$$\pi(\sigma|x)=\frac{2(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\alpha)^{\frac{\lambda+n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\lambda+n-1}{2})}\sigma^{-(\lambda+n)}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\alpha\Big)\right\},$$

记 $T=T(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，$\sigma$ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(T)=\Big[\frac{1}{\lambda+n-2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\frac{2\alpha}{\lambda+n-2}\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

下面我们证明 $\gamma(\delta_B)<\infty$, 从而说明 Bayes 估计是唯一的. 由于

$$\begin{aligned}E\big[L(\sigma,\delta_B(T))\big]=&E\Big(\frac{\sigma}{\delta_B(T)}\Big)+E\Big(\frac{\delta_B(T)}{\sigma}\Big)-2\\=&\sqrt{\lambda+n-2}E\Big(\frac{\sigma}{\sqrt{T+2\alpha}}\Big)+\frac{1}{\sqrt{\lambda+n-2}}E\Big(\frac{\sqrt{T+2\alpha}}{\sigma}\Big)-2\\\le&\sqrt{\lambda+n-2}E\Big(\frac{\sigma}{\sqrt{T}}\Big)+\frac{1}{\sqrt{\lambda+n-2}}E(T^{\frac{1}{2}}\sigma^{-1})+\sqrt{2\alpha}E(\sigma^{-1})-2\\=&\sqrt{\lambda+n-2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{\lambda+n-2}}\Bigg(\sqrt{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}+\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)}\Bigg)-2\\<&\infty,\end{aligned}$$

因此 $\delta_B(T)$ 是唯一的. 另外，这个估计是可容许的，事实上，因为 $\delta_B(T)$ 是唯一的，如果存在另一估计 $\delta(X)$ 优于 $\delta_B(T)$, 则一定有 $\delta(X)$ 对应的风险函数小于或等于 $\delta_B(T)$ 对应的风险函数，从而 $\gamma(\delta)\le\gamma(\delta_B)$ 成立. 这说明 δ 也是一个 Bayes 估计，与唯一性矛盾，表明 Bayes 估计 $\delta_B(T)$ 是可容许的.

下面我们对 c 和 d 的不同取值情况分别讨论 σ 的形如 $\big[cT(X)+d\big]^{\frac{1}{2}}$ 的容许性. 为方便记 $c^*=\frac{1}{n-1}$, $n>1$.

定理 3.2 当 $0\le c<c^*$, $d>0$ 时，估计量 $\big[cT(X)+d\big]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的.

证 在损失函数 (1.1) 之下，我们证明了 σ 有唯一的 Bayes 解:

$$\delta_B(T)=\Big[\frac{1}{\lambda+n-2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\frac{2\alpha}{\lambda+n-2}\Big]^{\frac{1}{2}},$$

此时先验分布密度为

$$\pi(\sigma)=\frac{2\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)}\sigma^{-\lambda}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2}},\qquad\lambda>1,\ \ \alpha>0.$$

当 $0<c<c^*$, $d>0$ 时，令 $c=\frac{1}{\lambda+n-2}$, $d=\frac{2\alpha}{\lambda+n-2}$, 一定有 $\lambda>1$, $\alpha>0$ 使上面的等式成立. 由于在前面我们已经讨论了 Bayes 估计 $\delta_B(T)$ 是可容许的, 故此时 $\big[cT(X)+d\big]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的.

当 $c=0$, $d>0$ 时，估计量 $\left[cT(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的. 由于它是取常值估计.

定理 3.3 当 $d>0$ 时，估计量 $\left[c^*T(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的.

证 给定非退化先验分布具有概率密度

$$\pi_k(\sigma)=\frac{2\alpha^{\frac{1}{2k}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\sigma^{-1-\frac{1}{k}}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2}},\qquad \alpha,k,\sigma>0.$$

在损失函数 (1.1) 之下，σ 的 Bayes 估计为

$$\delta_k(T)=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2+2\alpha}{n+\frac{1}{k}-1}}.$$

取

$$\delta(T)=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i^2+2\alpha}{n-1}}.$$

则

$$\begin{aligned}\gamma_{\pi_k}(\delta)-\gamma_{\pi_k}(\delta_k)=&E\left(\frac{\delta-\delta_k}{\sigma}\right)+E\left(\frac{\sigma}{\delta}-\frac{\sigma}{\delta_k}\right)\\ =&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[\sigma\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\delta_k}\right)+\frac{1}{\sigma}(\delta-\delta_k)\right]\\ &\times\frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t}\frac{2\alpha^{\frac{1}{2k}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\sigma^{-1-\frac{1}{k}}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2}}\,d\sigma\,dt\\ =&\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\delta_k}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2k}}}{\left(\alpha+\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}}}\,dt\\ &+\int_0^{+\infty}(\delta-\delta_k)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2k}}}{\left(\alpha+\frac{t}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}}}\,dt.\end{aligned}$$

令 $P(k)=\left(n+\frac{1}{k}-1\right)^{\frac{1}{2}}-(n-1)^{\frac{1}{2}}$, $Q(k)=(n-1)^{-\frac{1}{2}}-\left(n+\frac{1}{k}-1\right)^{-\frac{1}{2}}$. 从而

$$\begin{aligned}\gamma_{\pi_k}(\delta)-\gamma_{\pi_k}(\delta_k)=&Q(k)\frac{2^{\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\alpha^{\frac{1}{2k}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(t+2\alpha)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}}}\,dt\\ &-P(k)\frac{2^{\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\alpha^{\frac{1}{2k}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(t+2\alpha)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}}}\,dt\\ =&\sqrt{2}Q(k)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}\right)}-\frac{\sqrt{2}}{2}P(k)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}\right)}.\end{aligned}$$

当 $k\to+\infty$ 时，$\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}\right),\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}\right),\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)$ 的极限 $\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right),\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$ 均为有限数，$P(k)\to 0$, $Q(k)\to 0$, 由此推得 $\gamma_{\pi_k}(\delta)-\gamma_{\pi_k}(\delta_k)\to 0\ (k\to+\infty)$. 此外，$\forall a,b\in[0,+\infty)$, $a<b$, 必存在 $\varepsilon>0$, 使得当 k 足够大时，$\int_a^b \pi_k(\sigma)\,d\sigma>\varepsilon$ 恒成立. 因此当 $k\to+\infty$ 时，

$$\frac{\gamma_{\pi_k}(\delta)-\gamma_{\pi_k}(\delta_k)}{\displaystyle\int_a^b \pi_k(\sigma)\,d\sigma}\longrightarrow 0.$$

下面证明风险函数 $R(\sigma,\delta)$ 关于 σ 是连续的. 对任意 $\sigma_1>0$, 当 $\frac{\sigma_1}{2}<\sigma<\frac{3\sigma_1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}&\big|R(\sigma,\delta)-R(\sigma_1,\delta)\big|=\Big|\int\frac{(\sigma-\delta)^2}{\sigma\delta}\,\mathrm{d}F_\sigma(\delta)-\int\frac{(\sigma_1-\delta)^2}{\sigma_1\delta}\,\mathrm{d}F_{\sigma_1}(\delta)\Big|\\
=&\Big|\int\Big(\frac{\sigma}{\delta}+\frac{\delta}{\sigma}-2\Big)\,\mathrm{d}F_\sigma(\delta)-\int\Big(\frac{\sigma_1}{\delta}+\frac{\delta}{\sigma_1}-2\Big)\,\mathrm{d}F_{\sigma_1}(\delta)\Big|\\
=&\Big|\int\Big[\Big(\frac{\sigma}{\delta}-\frac{\sigma_1}{\delta}\Big)+\Big(\frac{\delta}{\sigma}-\frac{\delta}{\sigma_1}\Big)\Big]\,\mathrm{d}F_{\sigma_1}(\delta)+\int\Big(\frac{\sigma}{\delta}+\frac{\delta}{\sigma}\Big)\,\mathrm{d}\Big(F_\sigma(\delta)-F_{\sigma_1}(\delta)\Big)\Big|\\
\le&\int\Big|\frac{1}{\delta}(\sigma-\sigma_1)+\delta\Big(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma_1}\Big)\Big|\,\mathrm{d}F_{\sigma_1}(\delta)+\int\Big|\frac{\sigma}{\delta}+\frac{\delta}{\sigma}\Big|\,\mathrm{d}\big|F_\sigma(\delta)-F_{\sigma_1}(\delta)\big|\\
=&I_1(\sigma)+I_2(\sigma).\end{aligned}$$

现在，只需证明当 $\sigma\to\sigma_1$ 时，$I_1(\sigma)\to 0, I_2(\sigma)\to 0$ 即可. 由于当 σ 充分接近 σ_1 时，满足 $\frac{\sigma_1}{2}<\sigma<\frac{3\sigma_1}{2}$, 从而有

$$\Big|\frac{1}{\delta}(\sigma-\sigma_1)+\delta\Big(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma_1}\Big)\Big|\le\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\sigma_1}{2}+\delta\cdot\frac{1}{\sigma_1}.$$

同时由题设中 $\delta(X)$ 风险有限可知 $E_{\sigma_1}\left(\frac{1}{\delta}\right)<\infty$, $E_{\sigma_1}(\delta)<\infty$, 则由控制收敛定理和损失函数的连续性即知，当 $\sigma\to\sigma_1$ 时，$I_1(\sigma)\to 0$. 下面证当 $\sigma\to\sigma_1$ 时，$I_2(\sigma)\to 0$. 由于

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{\sigma}{\delta}+\frac{\delta}{\sigma}\Big|\cdot\big|f(x_1,\cdots,x_n|\sigma)-f(x_1,\cdots,x_n|\sigma_1)\big|\\
\le&\Big(\frac{3\sigma_1}{2}\cdot\frac{1}{\delta(x_1,\cdots,x_n)}+\frac{2}{\sigma_1}\delta(x_1,\cdots,x_n)\Big)\\
&\times\frac{2}{(\sqrt{2\pi})^n}\Big(\frac{2}{\sigma_1}\Big)^n\exp\Big\{-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\Big\}\\
=&\Big(3\sigma_1\cdot\frac{1}{\delta(x_1,\cdots,x_n)}+\frac{4}{\sigma_1}\delta(x_1,\ldots,x_n)\Big)f(x_1,\cdots,x_n|\sigma_1).\end{aligned}$$

而由题设中 $\delta(X)$ 风险有限可知 $E_{\frac{\sigma_1}{2}}\left(\frac{1}{\delta}\right)<\infty$, $E_{\frac{\sigma_1}{2}}(\delta)<\infty$, 又因为当 $\sigma\to\sigma_1$ 时

$$\big|f(x_1,\cdots,x_n|\sigma)-f(x_1,\ldots,x_n|\sigma_1)\big|\longrightarrow 0,$$

所以由控制收敛定理可得：当 $\sigma\to\sigma_1$ 时，$I_2(\sigma)\to 0$. 这就证明了风险函数 $R(\sigma,\mathrm{d})$ 关于 σ 是连续的. 由 [6] 可知：估计量 $\left[cT(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的.

定理 3.4 估计量 $\left[c^*T(X)\right]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的.

为了证明定理 3. 4, 首先引入如下引理 [5]:

引理[5] 令 θ 是关于统计量 Y 的分布的实位置参数, $q(y)$ 是 Y 的密度函数. R_0 是 θ 在损失函数 $L^*(\theta,\delta^*)=W^*(\delta^*-\theta)$ 下的 MRE 估计的风险, 且假定 $R_0<\infty$, 以及

$$\text{(i)}\quad R(\theta,Y+c_i)\longrightarrow R(\theta,Y),\qquad \text{当}\ i\to\infty \Longleftrightarrow c_i\to 0,\ \text{当}\ i\longrightarrow\infty;$$

$$\text{(ii)}\quad \int_0^{+\infty}\Big\{\sup_{t>0}\int_{-\lambda}^{\lambda}\big[W^*(y)-W^*(y+t)\big]q(y)\,\mathrm{d}y\Big\}\,\mathrm{d}\lambda<\infty;$$

$$\text{(iii)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|y|W^*(y)q(y)\,\mathrm{d}y<\infty.$$

那么, 对于 θ 在 L^* 下的估计 Y 是可容许的.

定理 3.4 的证明 令

$$Z=\Big[\frac{T(X)}{n-1}\Big]^{\frac12},\qquad Y=\ln Z,$$

易知 Y 的密度函数为

$$q(y)=\frac{2^{1-\frac n2}}{\Gamma(\frac n2)}(n-1)^{\frac n2}\exp\{n(y-\ln\sigma)\}\exp\Big\{-\frac12(n-1)\exp\{2(y-\ln\sigma)\}\Big\}.$$

由此可见 $\ln\sigma$ 是 $\ln Z$ 的位置参数, 而损失函数是 $\frac{\delta}{\sigma}$ 的函数, 这时, 当损失函数为 $L(\sigma,\delta)=W(\frac{\delta}{\sigma})$, 在 Z 的基础上估计 σ, 等价于损失函数为 $L^*(\theta,\delta^*)=W^*(\theta-\delta^*)$, 在 $Y=\ln Z$ 的基础上估计 $\theta=\ln\sigma$, 这里 $W^*(x)=W(e^x)$, $W(x)=x+x^{-1}-2$, 因而

$$W^*(x)=e^x+e^{-x}-2,$$

即

$$L^*(\theta,\delta^*)=e^{\theta-\delta^*}+e^{-(\theta-\delta^*)}-2,$$

令 $p(z)$ 是 $Z=\big[\frac{T(X)}{n-1}\big]^{\frac12}$, $\sigma=1$ 的概率密度, 有

$$p(z)=(n-1)^{\frac n2}2^{1-\frac n2}\frac{1}{\Gamma(\frac n2)}z^{n-1}e^{-\frac{n-1}{2}z^2},$$

那么 $q(y)=e^yp(e^y)$, $-\infty<y<+\infty$ 是 $Y=\ln Z$ 的密度函数. 这样, 由 Brown 引理, 在损失函数 $L(\sigma,\delta)$ 下 σ 的估计量 $Z=\big[\frac{T(X)}{n-1}\big]^{\frac12}$ 是可容许的等价于在损失函数 $L^*(\theta,\delta^*)$ 下 θ 的估计量 Y 是可容许的. 基于上面讨论, 只须验证 Brown 定理条件 (i)–(iii).

验证条件 (i):

$$\begin{aligned}
&R(\theta,Y+c_i)\to R(\theta,Y),\qquad \text{当}\ i\to\infty\\
\Longleftrightarrow\ &E_{\theta=0}\big[e^{Y+c_i}+e^{-(Y+c_i)}-2\big]\longrightarrow E_{\theta=0}\big[e^Y+e^{-Y}-2\big],\qquad \text{当}\ i\to\infty\\
\Longleftrightarrow\ &E_{\theta=0}\big[e^Y(e^{c_i}-1)+e^{-Y}(e^{-c_i}-1)\big]\longrightarrow 0,\qquad \text{当}\ i\to\infty.
\end{aligned}$$

而

$$E_{\theta=0}e^Y=E_{\sigma=1}e^{\ln[\sqrt{\frac{T(x)}{n-1}}]}=E_{\sigma=1}\Big[\sqrt{\frac{T(x)}{n-1}}\Big]=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac n2\big)},$$

$$E_{\theta=0}e^{-Y}=E_{\sigma=1}e^{-\ln[\sqrt{\frac{T(x)}{n-1}}]}=E_{\sigma=1}\Big[\sqrt{\frac{n-1}{T(x)}}\Big]=\frac{\sqrt{2(n-1)}}{2}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac n2\big)}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
& R(\theta, Y+c_i) \longrightarrow R(\theta, Y), \qquad \text{当 } i \longrightarrow \infty \\
\Longleftrightarrow & (e^{c_i}-1)\sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
& + (e^{-c_i}-1)\frac{\sqrt{2(n-1)}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \longrightarrow 0, \qquad \text{当 } i \to \infty \\
\Longleftrightarrow & \frac{\sqrt{2(n-1)}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(e^{c_i}+e^{-c_i}-2) \longrightarrow 0, \qquad \text{当 } i \to \infty \\
\Longleftrightarrow & c_i \longrightarrow 0, \qquad \text{当 } i \longrightarrow \infty
\end{aligned}
$$

(若不然，存在一列 $c_i, c_i' \to a > 0$, 当 $i \to \infty$, 那么 $e^a + e^{-a} - 2 = 0$, 即 $e^a = 1$, 从而 $a = 0$, 与 $a > 0$ 矛盾). 条件 (i) 得证.

下面验证条件 (ii).

固定 λ, 那么

$$
\begin{aligned}
& \sup_t \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[W^*(y) - W^*(y+t)\right] q(y)\,\mathrm{d}y \\
= & \sup_t \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[e^y + e^{-y} - 2 - \left(e^{y+t}e^{-(y+t)} - 2\right)\right] q(y)\,\mathrm{d}y \\
= & \sup_t \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[e^y(1-e^t) + e^{-y}(1-e^{-t})\right] q(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{令 } c = e^t \\
= & \sup_{c>0} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[(1-c)e^y + \left(1-\frac{1}{c}\right)e^{-y}\right] q(y)\,\mathrm{d}y \\
= & \sup_{c>0} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[(1-c)e^y + \left(1-\frac{1}{c}\right)e^{-y}\right] e^y p(e^y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{令 } z = e^y \\
= & \sup_{c>0} \int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}} \left[(1-c)z + \left(1-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{z}\right] p(z)\,\mathrm{d}z \\
= & \sup_{c>0} \left\{(1-c)\int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}} z p(z)\,\mathrm{d}z + \left(1-\frac{1}{c}\right)\int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}} \frac{1}{z} p(z)\,\mathrm{d}z\right\}.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
& h(\lambda) = \int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}} z p(z)\,\mathrm{d}z, \qquad g(\lambda) = \int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}}, \frac{1}{z} p(z)\,\mathrm{d}z, \\
& \sup_t \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[W^*(y) - W^*(y+t)\right] q(y)\,\mathrm{d}y \\
= & \sup_{c>0} \left\{(1-c)h(\lambda) + \left(1-\frac{1}{c}\right)g(\lambda)\right\} \\
= & \left(1-\sqrt{\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}}\right)h(\lambda) + \left(1-\sqrt{\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}}\right)g(\lambda) \qquad \left(\text{当 } c = \sqrt{\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}} \text{ 时，达到最大}\right)
\end{aligned}
$$

$$=\left(\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right)^2=\left|h(\lambda)-g(\lambda)\right|\frac{\left|\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right|}{\sqrt{h(\lambda)}+\sqrt{g(\lambda)}}.$$

欲证条件 (ii), 只须证明:

$$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right)^2\mathrm{d}\lambda=\int_0^{+\infty}\left|h(\lambda)-g(\lambda)\right|\frac{\left|\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right|}{\sqrt{h(\lambda)}+\sqrt{g(\lambda)}}\mathrm{d}\lambda<\infty.$$

由于

$$\lim_{\lambda\to\infty}h(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

故对任意的 $0<\varepsilon<1$, $\exists A>0$, 使得

$$\frac{\left|\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right|}{\sqrt{h(\lambda)}+\sqrt{g(\lambda)}}<\varepsilon<1,\qquad\forall\lambda>A,$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right)^2\mathrm{d}\lambda=&\int_0^{A}\left(h(\lambda)+g(\lambda)-2\sqrt{h(\lambda)g(\lambda)}\right)\mathrm{d}\lambda\\&+\int_A^{+\infty}\left|h(\lambda)-g(\lambda)\right|\frac{\left|\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right|}{\sqrt{h(\lambda)}+\sqrt{g(\lambda)}}\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

对于 $0<\lambda<A$, $h(\lambda)<\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $g(\lambda)<\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $-2\sqrt{h(\lambda)g(\lambda)}<0$,

$$\int_0^{A}\left(\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right)^2\mathrm{d}\lambda<\int_0^{A}\sqrt{2(n-1)}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\mathrm{d}\lambda<\infty.$$

对于 $\lambda>A$, $\frac{|\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}|}{\sqrt{h(\lambda)}+\sqrt{g(\lambda)}}<1$, 下面计算 $h(\lambda)-g(\lambda)$, 由于

$$p(z)=(n-1)^{\frac{n}{2}}2^{1-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}z^{n-1}e^{-\frac{n-1}{2\sigma^2}z^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}h(\lambda)-g(\lambda)=&\int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}}zp(z)\,\mathrm{d}z-\int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}}\frac{1}{z}p(z)\,\mathrm{d}z\\=&(n-1)^{\frac{n}{2}}2^{1-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}}z^ne^{-\frac{n-1}{2\sigma^2}z^2}\,\mathrm{d}z-\int_{e^{-\lambda}}^{e^{\lambda}}z^{n-2}e^{-\frac{n-1}{2\sigma^2}z^2}\,\mathrm{d}z\right]\\=&\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(e^{-\lambda(n-1)}e^{-\frac{n-1}{2}e^{-2\lambda}}-e^{\lambda(n-1)}e^{-\frac{n-1}{2}e^{2\lambda}}\right).\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\int_A^{+\infty}\left|h(\lambda)-g(\lambda)\right|\frac{\left|\sqrt{h(\lambda)}-\sqrt{g(\lambda)}\right|}{\sqrt{h(\lambda)}+\sqrt{g(\lambda)}}\,\mathrm{d}\lambda\\
\le&\int_A^{+\infty}\left|h(\lambda)-g(\lambda)\right|\mathrm{d}\lambda\le\int_0^{+\infty}\left|h(\lambda)-g(\lambda)\right|\mathrm{d}\lambda\\
\le&\Big(\frac{n-1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Big\{\int_0^{+\infty}e^{-\lambda(n-1)}e^{-\frac{n-1}{2}e^{-2\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda+\int_0^{+\infty}e^{\lambda(n-1)}e^{-\frac{n-1}{2}e^{2\lambda}}\,\mathrm{d}\lambda\Big\}\\
=&\Big(\frac{n-1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})}\Big\{\int_0^{1}x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{n-1}{2}x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{n-1}{2}x}\,\mathrm{d}x\Big\}\\
=&\Big(\frac{n-1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{n-1}{2}x}\,\mathrm{d}x\\
=&\Big(\frac{n-1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}\\
=&\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}<\infty.
\end{aligned}
$$

从而条件 (ii) 得证.

下面验证条件 (iii).

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|y|W^*(y)q(y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,(e^y+e^{-y}-2)q(y)\,\mathrm{d}y\\
\le&\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,(e^y+e^{-y})e^yp(e^y)\,\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big(z+\frac{1}{z}\Big)p(z)\,\mathrm{d}z+\int_1^{+\infty}\ln z\Big(z+\frac{1}{z}\Big)p(z)\,\mathrm{d}z\\
=&\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)zp(z)\,\mathrm{d}z+\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)\frac{1}{z}p(z)\,\mathrm{d}z\\
&+\int_1^{+\infty}\ln z\Big(z+\frac{1}{z}\Big)p(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

当 $0<z<1$ 时，$\frac{1}{z}>1$，$0<\ln\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{z}$，

$$
0<\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)<\frac{1}{n-\varepsilon-1}z^{\varepsilon+1-n},\qquad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}.
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&0\le\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)zp(z)\,\mathrm{d}z\le\int_0^1\Big(\frac{1}{z}\Big)zp(z)\,\mathrm{d}z\le\int_0^{+\infty}p(z)\,\mathrm{d}z=1,\\
&0\le\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)\frac{1}{z}p(z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad\le\int_0^1\frac{1}{n-\varepsilon-1}z^{\varepsilon+1-n}\frac{1}{z}p(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{n-\varepsilon-1}\int_0^1 z^{\varepsilon-n}(n-1)^{\frac{n}{2}}2^{1-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}z^{n-1}e^{-\frac{n-1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{n-\varepsilon-1}\int_0^1 z^{\varepsilon-1}(n-1)^{\frac{n}{2}}2^{1-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{n-1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z\\
&\le\frac{1}{n-\varepsilon-1}\int_0^\infty z^{\varepsilon-1}(n-1)^{\frac{n}{2}}2^{1-\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{n-1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z \qquad \text{令 } t=(n-1)z^2\\
&=\frac{1}{(n-\varepsilon-1)\Gamma(\frac{n}{2})}(n-1)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}2^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{(n-\varepsilon-1)\Gamma(\frac{n}{2})}(n-1)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}2^{-\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})2^{-\frac{\varepsilon}{2}}\\
&=\frac{2^{-\frac{n+\varepsilon}{2}}(n-1)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}}{(n-\varepsilon-1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}<\infty.
\end{aligned}
$$

因此

$$0\le\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big(z+\frac{1}{z}\Big)p(z)\,\mathrm{d}z<\infty.$$

当 $z>1$ 时，$\ln z<z$ 故

$$
\begin{aligned}
0\le\int_1^{+\infty}\ln z\Big(z+\frac{1}{z}\Big)p(z)\,\mathrm{d}z&<\int_1^{+\infty}z\Big(z+\frac{1}{z}\Big)p(z)\,\mathrm{d}z\\
&\le\int_1^{+\infty}(z^2+1)p(z)\,\mathrm{d}z=1+E_{\sigma=1}Z^2=1+\frac{n}{n-1}<\infty.
\end{aligned}
$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|W^*(y)q(y)\,\mathrm{d}y<\infty.$$

这样就验证了条件 (iii). 所以对于 $\theta=\ln\sigma$, $Y=\ln Z$ 在损失函数 $L^*(\theta,\delta^*)$ 下是可容许的，进而对于 σ, $Z=\big[\frac{T(X)}{n-1}\big]^{\frac{1}{2}}$ 在损失函数 $L(\sigma,\delta)$ 下是可容许的.

定理 3.5 当 $0<c\neq c^*$ 且 $d=0$ 时，估计量 $\big[cT(X)+d\big]^{\frac{1}{2}}$ 是不可容许的.

证 当 $0<c\neq c^*$ 且 $d=0$ 时，我们证明估计量 $\delta^*(X)=\big[c^*T(X)\big]^{\frac{1}{2}}$ 优于估计量 $\big[cT(X)\big]^{\frac{1}{2}}$.

由于

$$R(\sigma,\delta)-R(\sigma,\delta^*)=E_\sigma\Big[\sigma\Big(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c^*}}\Big)\frac{1}{\sqrt{T}}+\frac{1}{\sigma}(\sqrt{c}-\sqrt{c^*})\sqrt{T}\Big].$$

记 $R(X)=\sqrt{T(X)}$, $R(X)$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{2(\frac{1}{2\sigma^2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

则

$$E_\sigma(\sqrt{T}) = E_\sigma\big(R(X)\big) = \sqrt{2}\sigma \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

$$E_\sigma\Big(\frac{1}{\sqrt{T}}\Big) = E_\sigma\Big(\frac{1}{R(X)}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

因而

$$\begin{aligned} R(\sigma,\delta) - R(\sigma,\delta^*) =& \sigma\Big(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c^*}}\Big)\frac{\sqrt{2}}{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} + \frac{1}{\sigma}(\sqrt{c} - \sqrt{c^*})\sqrt{2}\sigma \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c^*}}\Big) + (n-1)(\sqrt{c} - \sqrt{c^*}\Big) \end{aligned}$$

记

$$U(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c^*}}\Big) + (n-1)(\sqrt{c} - \sqrt{c^*})\Big],$$

那么

$$U'(c) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\big[-c^{-\frac{3}{2}} + (n-1)c^{-\frac{1}{2}}\big].$$

令 $y = c^{-\frac{1}{2}}$, 有

$$U'(y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\big[-y^3 + (n-1)y\big].$$

由于 $y > 0$, 其零点为 $y_1 = \sqrt{n-1}$, $c^* = \frac{1}{y_1^2}$, 由 $U'(y)$ 的形式可知，当 $0 < y < y_1$ 时，即 $c > \frac{1}{y_1^2} = c^*$, $U'(y) = U'(c) > 0$, 因而 $U(c)$ 为单调上升的，又 $U(c^*) = 0$, 故 $U(c) > 0$. 当 $y > y_1$ 时，即 $0 < c < \frac{1}{y_1^2} = c^*$, $U'(y) = U'(c) < 0$, 因而 $U(c)$ 为单调下降的, 又 $U(c^*) = 0$, 故 $U(c) > 0$. 由上面叙述可知，当 $0 < c \neq c^*$ 时，都有 $R(\sigma,\delta) > R(\sigma,\delta^*)$, 这说明估计量 $\delta^*(X) = \big[c^*T(X)\big]^{\frac{1}{2}}$ 优于估计量 $\big[cT(X)\big]^{\frac{1}{2}}$, 可见， $\big[cT(X)\big]^{\frac{1}{2}}$ 为不可容许的.

注 根据定理 3.5, 我们发现 σ 的极大似然估计是不可容许的，而且 σ 的 UMVU 估计也是不可容许的. 事实上，由于 $\sqrt{T(X)}$ 是 σ 的充分完全统计量，那么 UMVU 估计是关于 $\sqrt{T(X)}$ 的无偏估计量. 下面我寻找 σ 的 UMVU 估计. 由前面讨论易知,

$$E_\sigma\sqrt{T(X)} = \sqrt{2}\sigma\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

因此， σ 的 UMVU 估计为

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}\sqrt{T(X)},$$

此时， $c = \Big(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big)^2$, $d = 0$, 又因为

$$\Big(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}\Big)^2 = C(n)D(n),$$

其中 $C(n)$ 是一个与 n 有关的有理数， $D(n)$ 是一个与 n 和 π 有关的无理数，从而 $c \neq \frac{1}{n-1} = c^*$. 于是由定理 3. 5 得 σ 的 UMVU 估计亦是不可容许的.

定理 3.6 当 $c > c^*$ 且 $d > 0$ 时，估计量 $\left[cT(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$ 是不可容许的.

证 估计量 $\delta^*(X) = \left[c^*T(X)+\frac{c^*}{c}d\right]^{\frac{1}{2}}$ 要优于 $\delta(X) = \left[cT(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$. 事实上,

$$\begin{aligned} R(\sigma,\delta)-R(\sigma,\delta^*) =&E\left[\left(\frac{\sigma}{\delta}-\frac{\sigma}{\delta^*}\right)+\left(\frac{\delta}{\sigma}-\frac{\delta^*}{\sigma}\right)\right] \\ =&\sigma\left(1-\sqrt{\frac{c}{c^*}}\right)E\left(\frac{1}{\delta}\right)+\frac{1}{\sigma}\left(1-\sqrt{\frac{c^*}{c}}\right)E\delta \\ \geq&\sigma\left(1-\sqrt{\frac{c}{c^*}}\right)\frac{1}{\sqrt{c}}E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)+\frac{1}{\sigma}\left(1-\sqrt{\frac{c^*}{c}}\right)\sqrt{c}E(\sqrt{T}) \\ =&E\left[\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c^*}}\right)\frac{1}{\sqrt{T}}+\frac{1}{\sigma}(\sqrt{c}-\sqrt{c^*})\sqrt{T}\right] \geq 0. \end{aligned}$$

(最后不等号在定理 3. 5 中已经证明过). 综上所述，当 c,d 满足 $\{c=c^*,\ d=0\}$ 或 $\{0 \leq c \leq c^*,\ d>0\}$ 时，估计 $=\left[cT(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$ 是可容许的. 当 c,d 满足 $\{c>c^*,\ d>0\}$ 或 $\{0<c\neq c^*,\ d=0\}$ 时，估计 $\left[cT(X)+d\right]^{\frac{1}{2}}$ 是不可容许的.

4 MRE 的 Minimax 估计

在这一节，我们论证了在损失函数 (1.1) 下 σ 的最优同变估计具有 Minimax 性. 由下面定理给出.

定理 4.1 在损失函数 (1.1) 之下，估计量 $\delta^*(X)=\sqrt{\frac{T(X)}{n-1}}$ 是 σ 的一个 Minimax 估计.

为了证明这个定理，我们首先介绍如下引理 [7]:

引理 4.1 若 δ^* 是容许的，而且在 Θ 上为常数风险函数，则 δ^* 是 θ 的 Minimax 估计.

定理 4.1 的证明 首先我们验证 $\delta^*(X)$ 的风险函数 $R(\sigma,\delta^*)$ 在 Θ 上为一常数.

$$\begin{aligned} R(\sigma,\delta^*) =&E_\sigma\left[L(\sigma,\delta^*)\right]=\frac{1}{\sigma}E_\sigma\delta^*+\sigma E_\sigma\left(\frac{1}{\delta^*}\right)-2 \\ =&\frac{1}{\sigma\sqrt{n-1}}E_\sigma(\sqrt{T})+\sigma\sqrt{n-1}E_\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \\ =&\frac{1}{\sigma\sqrt{n-1}}\sqrt{2}\sigma\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}+\sigma\sqrt{n-1}\,\frac{\sqrt{2}}{2\sigma}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ =&\sqrt{2(n-1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

显然， $R(\sigma,\delta^*)$ 在 Θ 上为一常数，定理 3.4 已经证明 $\delta^*(X)$ 是可容许的，由引理 4.1 可知，估计量 $\delta^*(X)=\sqrt{\frac{T(X)}{n-1}}$ 是 σ 的一个 Minimax 估计.

参 考 文 献

1 Parsian A, Nematollahi N. Estimation of Scale Parameter under Entropy Loss Function. *J. of statistical Planning and Inference*, 1996, 52: 77–91

2 王德辉, 宋立新. 熵损失下定数截尾情形参数的 Bayes 估计. 应用概率统计, 1999, 15: 176–186
(Wang Dehui, Song lixin. Estimation of Exponential Distribution Parameter under Entropy Loss Function Based on Type Ⅱ Censoring. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 1999, 15: 176–186)

3 宋立新, 王德辉, 崔安玲, 刘立新. 熵损失函数下刻度参数估计的不变性和本质完全类. 吉林大学自然科学学报, 1998, 1: 5–8
(Song lixing, Wang Dehui, Cui anling, Liulixin. Essentially Complete Class and Invariance of Estimator of Scale Parameter under the Function of Entropy Loss. *ACTA Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1998, 1: 5–8)

4 孔令军, 宋立新. 对称熵损失下指数分布参数的估计. 吉林大学自然科学学报, 1998, 2: 9–14
(Kong lingjun, Song lixin. Estimation of Exponetial Distribtion Parameter under Symmetric Entyopy Loss. *ACTA Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1998, 2: 9–14)

5 Brown L D. On the Admissibility of Invariant Estimaters of One or More Location Parameters. *Ann. Math. Static.*, 1966, 37: 1087–1136

6 Blyth C R. On Minimax Statistical Decision Procedures and Their Admissibility. *Ann. Math. Statist.*, 1951, 22: 22–42

7 成平, 陈希孺, 陈桂景, 吴传义. 参数估计. 上海: 上海科学技术出版社, 1985
(Cheng Ping, Chen Xiru, Chen Guijing, Wu Chuanyi. Parameter Estimation. Shanghai: Scientific and Technical Publishers, Shanghai, 1985)

ESTIMATION OF SCALE PARAMETER OF THE NORMAL DISTRIBUTION UNDER A SYMMETRIC LOSS FUNCTION

Wang Zhongqiang　　Wang Dehui

(*Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012)

Song Lixin

(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 130012)

Abstract In this paper, we propose a symmetric loss function for scale parameter with form as $L(\sigma, d) = \frac{d}{\sigma} + \frac{\sigma}{d} - 2$. This loss function can be viewed as a generalization of entropy loss and squared loss for scale σ. For the normal distribution $N(0, \sigma^2)$, we give the minimum risk equivariant estimator (MRE) and the Baysian estimation of σ. Furthermore, the admissibility and inadmissibility of the estimators with form $(cT + d)^{\frac{1}{2}}$ are studied.

Key words Symmetric loss function, minimum risk equivariant estimator, Baysian estimator, admissibility