系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
20(1) (2000, 1), 24–30

Pitman 准则下指数分布刻度参数幂的分组定数截尾估计

黄言军 赖民 宋立新

(吉林大学数学研究所, 长春 130023)

摘要 在 Pitman 准则下，对指数分布刻度参数 σ 的形为 $\sigma^m(m \neq 0)$ 的待估函数，分三种情形给出相应的分组定数截尾估计；同时也讨论了位置 - 刻度线性同变估计中的最优估计.

关键词 Pitman 准则，可容许性，线性同变估计，分组定数截尾.

1 前 言

在生命检验中，N 个独立样本服从有共同刻度参数 $\sigma(\sigma > 0)$ 的指数分布，密度函数为

$$P(x, \sigma, \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} \exp\left\{ -\dfrac{x-\mu}{\sigma} \right\}, & \text{当 } x \geq \mu \text{ 时}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

这里 σ 未知. 对不同的样本，位置参数 μ 可能不同，且 $\mu \geq 0$.

我们把 N 个样本看成来自 K 个指数分布总体，且第 i 个总体样本有 n_i 个样本，于是有 $\sum\limits_{i=1}^{K} n_i = N$. 现在对第 i 个总体样本定数截取前 r_i 个顺序样本 $(r_i \leq n_i)$, 称此为分组定数截尾数据. 下面分三种情形考虑此时 $\sigma^m(m \neq 0)$ 的估计问题.

(1) K 个总体均不相同，即位置参数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_K$ 不同，但 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_K$ 均已知.

(2) K 个总体均相同，但共同的位置参数 μ 未知.

(3) K 个总体可能不同，且各自的位置参数 $\mu_i\,(i = 1, 2, \cdots, K)$ 均未知.

本文是在 Pitman 准则 [1] 下对以上三种情况考虑 σ^m 的分组定数截尾的估计问题.

相对于损失函数 $L(d, \theta), \theta = (\mu, \sigma)$, 称 σ^m 的估计 T_1 优于 T_2, 如果有

$$P_\theta(L(T_1, \theta) < L(T_2, \theta)) \geq P_\theta(L(T_2, \theta) < L(T_1, \theta))$$

对所有的 θ 成立，且不等式对一些 θ 严格成立，或者等价于：如果

$$PC(T_1, T_2, \theta) \equiv P_\theta(L(T_1, \theta) < L(T_2, \theta)) + \frac{1}{2} P_\theta(L(T_1, \theta) = L(T_2, \theta)) \geq \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

收稿日期：1997-10-19, 收到修改稿日期：1998-04-06.

对所有 θ 成立，且不等式对一些 θ 严格成立.

如果有 T_1 优于 T_2, 那么 T_2 被称为 (PC) 不可容许的.

Stavros Kouroulis[2] 曾在 1995 年讨论了在 Pitman 准则下指数分布刻度参数 σ 形如：$\{a\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{(1)}),\ a>0\}$ 的最优同变估计，其中 $x_i, i=1,\cdots,n$ 为样本，$x_{(1)}=\min\{x_i, i=1,2,\cdots,n\}$; 从而得到 σ 的极大似然估计与最小方差无偏估计均是 (PC) 不可容许的. 1998 年，黄言军、宋立新[3] 推广了他的结论，得到了在定数截尾情形下 σ^K 的最优同变估计，并且得到的统计量具有类似的统计性质. 本文进一步考虑了在分组定数截尾情形下 σ^m 的最优同变估计.

本文安排如下：在第二节，我们考虑 $m=1$ 时，即 σ 的分组定数截尾估计问题；在第三节，我们将第二节的结果推广到 $m\neq 0$ 的情形.

为方便，给出本文一些记号：记第 i 个总体前 r_i 个顺序统计量为：$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ir_i}$. 于是有：$X_{i1}\le X_{i2}\le\cdots\le X_{ir_i}\quad(i=1,2,\cdots,K)$. 记 $\sum_{i=1}^{K} r_i = R$, $V_i=\sum_{j=1}^{r_i}(X_{ij}-\mu_i)+(n_i-r_i)(X_{ir_i}-\mu_i)\,(i=1,2,\cdots,K)$, $\widehat{\theta}_1=\sum_{i=1}^{K}V_i$, $V_i^*=\sum_{j=1}^{r_i}(X_{ij}-\widehat{\mu})+(n_i-r_i)(X_{ir_i}-\widehat{\mu})\,(i=1,2,\cdots,K)$, 其中 $\widehat{\mu}=\min\{X_{i1}, i=1,2,\cdots,K\}$. 令 $\widehat{\theta}_2=\sum_{i=1}^{K}V_i^*$, $V_i'=\sum_{j=1}^{r_i}(X_{ij}-X_{i1})+(n_i-r_i)(X_{ir_i}-X_{i1})\,(i=1,2,\cdots,K)$, $\widehat{\theta}_3=\sum_{i=1}^{K}V_i'$, $Z=\frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\theta}_2}$. 再记 $a_0=\frac{1}{m(G(1,R))}$, $a_0'=\frac{1}{m(G(1,R-1))}$, $a_0''=\frac{1}{m(G(1,R-K))}$, 其中 $m(G(1,t)), t=R, R-1, R-K$ 分别为 Gamma 分布 $G(1,R), G(1,R-1), G(1,R-K)$ 的中位数.

在第二节我们将得出：

1^0 对第一种情形，在族 $C_1=\{a\widehat{\theta}_1; a>0\}$ 中 σ 的最优分组定数截尾估计为：$S_1=a_0\widehat{\theta}_1$.

2^0 对第二种情形，$S_2=a_0'\widehat{\theta}_2$ 是族 $C_2=\{a\widehat{\theta}_2; a>0\}$ 中 σ 的最优分组定数截尾估计.

3^0 对第三种情形，$S_3=a_0''\widehat{\theta}_3$ 是族 $C_3=\{a\widehat{\theta}_3; a>0\}$ 的最优分组定数截尾估计.

同时得出三种情形下 σ 的极大似然估计 (MLE) 和最小方差无偏估计 (MVUE) 均是 (PC) 不可容许的. 对第二种情形，进一步构造 σ 的分组定数截尾估计量 S_4, 并证明 S_4 优于 S_2.

2　σ 的分组定数截尾估计

设族 $C_1=\{a\widehat{\theta}_i; a>0\}, i=1,2,3$ 分别是三种情形下 σ 的线性同变估计类. 我们将找到各个类中的最优估计. 由文 [4] 知

$\widehat{\theta}_1$ 服从 Gamma 分布 $G(\frac{1}{\sigma}, R)$;

$\widehat{\theta}_2$ 服从 Gamma 分布 $G(\frac{1}{\sigma}, R-1)$;

$\widehat{\theta}_3$ 服从 Gamma 分布 $G(\frac{1}{\sigma}, R-K)$.

由于三种情形的结果证明均类似，所以我们只就第二种情形给出证明方法，一、三种情形只给出结果.

对于第二种情形，因为 N 个样本是独立同分布的，$\widehat{\mu}$ 与 $\widehat{\theta}_2$ 如前所述，则知 $\widehat{\mu}$ 与 $\widehat{\theta}_2$ 独立，且 $\widehat{\mu}$ 的分布密度[2] 为 $f_1(x)=\frac{N}{\sigma}\exp\{-\frac{N(x-\mu)}{\sigma}\}\,(x\ge\mu)$. σ 的分组定数截尾估计在位置 – 刻度变换：$(\widehat{\mu},\widehat{\theta}_2)\to(a\widehat{\mu}+b, a\widehat{\theta}_2), a>0$ 组成的变换群 G 下是不变的，所以 σ 的 G 等价

估计类是 $C_2 = \{a\widehat{\theta}_2, a > 0\}$.

假设损失函数 $L(d,\theta) = W(\frac{d}{\sigma})$, $\theta = (\mu, \sigma)$ (用 d 估计 σ), 这里 $W(\cdot)$ 是满足如下条件的非负函数.

A1 $W(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上为严格下凸函数，最小值点在 $t=1$ 时达到，且 $W(1)=0$.

A2 $W(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是连续的.

定理 2.1 设 $T_1 = a_1\widehat{\theta}_2$, $T_2 = a_2\widehat{\theta}_2$ 是 C_2 中两个估计量， $a_1 \neq a_2$, 设 y 满足: $W(a_1 y) = W(a_2 y)$, 则

(i) 如果 $0 < a_1 < a_2$, 那么有： $PC(T_1, T_2, \theta) = P(G(1, R-1) > y)$, 对所有的 θ 成立.

(ii) 如果 $a_1 > a_2 > 0$, 那么有： $PC(T_1, T_2, \theta) = P(G(1, R-1) < y)$, 对所有的 θ 成立.

(iii) 如果 $a_0' \leq a_1 < a_2$ 或 $a_0' \geq a_1 > a_2$, 有： $PC(T_1, T_2, \theta) > \frac{1}{2}$, 对所有的 θ 成立，即 T_1 优于 T_2. 这里 $G(1, R-1)$ 服从 Gamma $(1,R-1)$ 分布.

证 (i) 当 $\sigma = 1$ 时， $\widehat{\theta}_2$ 服从 $G(1, R-1)$ 分布，由文 [2] 中定理 2.3 有： $\varphi_1(Z) = a_1, \varphi_2(Z) = a_2, y(Z) = Y$ ($\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$ 均是非负可测函数， $y(\cdot)$ 为可测函数) 有：

$$PC(T_1, T_2, \theta) = P(\widehat{\theta}_2 > y) = P(G(1, R-1) > y),$$

于是 (i) 得证.

(ii) 类似可证.

(iii) 首先设 $a_0' \leq a_1 < a_2$, 由文 [2] 中命题 2.2 有 $y < \frac{1}{a_1}$, 因此 $y < \frac{1}{a_0'}$, 故

$$PC(T_1, T_2, \theta) = P(G(1, R-1) > y) > P\Big(G(1, R-1) > \frac{1}{a_0'}\Big) = \frac{1}{2}.$$

$a_0' \geq a_1 > a_2$ 的情形证明类似. 故定理证毕.

定理 2.2 $S_2 = a_0'\widehat{\theta}_2$ 是 C_2 中 σ 的最优估计.

证 设 $T = a\widehat{\theta}_2, a \neq a_0'$ 是 C_2 中估计量，则由定理 2.1 中的 (iii) 知 T 是 (PC) 不可容许的，从而 S_2 为 C_2 中 σ 的最优估计.

对于第一种情形类似有

定理 2.2′ $S_1 = a_0\widehat{\theta}_1$ 是 C_1 中 σ 的最优估计.

对于第三种情形类似有

定理 2.2″ $S_3 = a_0''\widehat{\theta}_3$ 是 C_3 中 σ 的最优估计.

注 对定理 2.2 有两点需要说明：

(1) Khattree[5] 已证明：对于绝对误差损失，如果 $a_0' \geq \frac{a_1+a_2}{2}$ 当 $a_1 > a_2$ 时，作为 σ 的分组定数截尾估计量 $a_1\widehat{\theta}_2$ 优于 $a_2\widehat{\theta}_2$. 显然 $a_0' \geq \frac{a_1+a_2}{2}$ 是比定理 2.1 中 (iii) 条件弱，但是定理 2.1 中 (iii) 对于只要满足 A1 和 A2 两个条件的损失函数一致成立.

(2) 如果损失函数满足 A1, 而不满足 A2, 那么 $S_2 = a_0'\widehat{\theta}_2$ 也是 C_2 中 σ 的最优估计量，但对 C_2 中任意 T 和所有 θ, 仅有 $PC(S_2, T, \theta) \geq \frac{1}{2}$, 也就是说条件 A2 是确保不等式严格成立的条件.

由上述三个定理很容易得出下面推论.

推论 2.3 三种情形下 σ 的分组定数截尾的 MVUE 和 MLE 均是 (PC) 不可容许的，且在第二、第三种情形下 σ 的 MVUE 均优于 MLE.

证 由文 [4] 知，第一种情形下 σ 的 MVUE=MLE=$\frac{1}{R}\widehat{\theta}_1$. 第二种情形下 σ 的 MVUE $= \frac{1}{R-1}\widehat{\theta}_2$, MLE=$\frac{1}{R}\widehat{\theta}_2$. 第三种情形下 σ 的 MVUE= $\frac{1}{R-K}\widehat{\theta}_3$, MLE=$\frac{1}{R}\widehat{\theta}_3$. 故均为各自线性同变

估计族 C_1, C_2, C_3 中元，所以它们均为 (PC) 不可容许的．另外由文 [6] 中众数 - 中位数 - 均值不等式有：

$$a_0' > \frac{1}{R-1} > \frac{1}{R}, \quad a_0'' > \frac{1}{R-K} > \frac{1}{R}.$$

所以 MVUE 优于 MLE. 证毕．

下面对第二种情形下的估计量作进一步改进．

当 $\sigma = 1$ 时，我们用 $g(y)$ 记 $\widehat{\theta}_2$ 的密度函数，$f_1(x)$ 为 $\widehat{\mu}$ 的密度，由于 $\widehat{\mu}$ 与 $\widehat{\theta}_2$ 独立，所以我们可以得出：当 $\sigma = 1$ 时，给定 $Z = \frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\theta}_2} = \xi$ 下 $\widehat{\theta}_2$ 的条件密度 $h(y|\xi)$. 因为 $\widehat{\theta}_2$ 与 $\widehat{\mu}$ 的联合密度为 $g(y)f_1(x)$, 又 $Z = \frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\theta}_2}$, 故 $(\widehat{\theta}_2, Z)$ 的联合密度为 $yg(y)f_1(zy)\,(zy > \mu)$, 故

$$h(y|\xi) = \frac{yg(y)\exp\{-N\xi y\}}{\displaystyle\int_v^{\infty} yg(y)\exp\{-N\xi y\}\,\mathrm{d}y}, \quad y > v, \tag{2.1}$$

其中 $v = \max\{0, \frac{\mu}{\xi}\}, \xi > 0$.

命题 2.4 如果 $\xi > 0$, 当 $\sigma = 1$ 时，用 $m(\xi, \mu)$ 记给定 $Z = \xi$ 下 $\widehat{\theta}_2$ 的条件分布中位数，则有：

(i) 如果 $\mu \le 0$, 那么 $m(\xi,\mu) = m(\xi, 0)$;

(ii) 如果 $\mu > 0$, 那么 $m(\xi,\mu) > m(\xi, 0)$;

(iii) $m(\xi, 0) = m(G(N\xi + 1, R))$.

其中 $m(G(N\xi+1, R))$ 为 Gamma 分布 $G(N\xi + 1, R)$ 的中位数．

证　(i) 对 $\mu < 0$, 由 (2.1) 式知 $h(y|\xi)$ 与 μ 无关，故 $m(\xi,\mu) = m(\xi, 0)$;

(ii) 因为 $\mu > 0$, 有 $v = \frac{\mu}{\xi} > 0$, 由 (2.1) 式有

$$\frac{1}{2} = \frac{\displaystyle\int_{m(\xi,0)}^{\infty} yg(y)\exp\{-N\xi y\}\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_0^{\infty} yg(y)\exp\{-N\xi y\}\,\mathrm{d}y} < \frac{\displaystyle\int_{m(\xi,0)}^{\infty} yg(y)\exp\{-N\xi y\}\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_v^{\infty} yg(y)\exp\{-N\xi y\}\,\mathrm{d}y}.$$

由中位数定义知 $m(\xi,\mu) > m(\xi, 0)$.

(iii) 因为 $\sigma = 1, \mu = 0$ 时

$$h(y|\xi) = \frac{(N\xi+1)^R}{(R-1)!} y^{(R-1)} \exp\{-(N\xi+1)y\}$$

是 $G(N\xi+1, R)$ 的分布密度．又由 (i) 知 $m(\xi,\mu) = m(\xi, 0)$ 故 $m(\xi, 0) = m(G(N\xi+1, R))$. 证毕．

定理 2.5 设 $D = \{\varphi(Z)\widehat{\theta}_2; \varphi(\cdot)$ 非负可测$\}$, 对于其中任何估计量 $T = \varphi(Z)\widehat{\theta}_2$, 设

$$\varphi^*(\xi) = \begin{cases} \varphi(\xi), & \text{当}\xi \le 0\text{时}, \\ \min\left\{\varphi(\xi), \dfrac{1}{m(G(N\xi+1, R))}\right\}, & \text{当}\xi > 0\text{时}. \end{cases}$$

设 $T^* = \varphi^*(Z)\widehat{\theta}_2$, 则有 $PC(T^*, T, \theta) \ge \frac{1}{2}$, 对所有 θ 成立，且当 $P_\theta(T^* \ne T) > 0$ 时，对每个 θ 有严格不等式成立．

证 对 $\theta=(\mu,\sigma)$, 设 $\varpi=(\frac{\mu}{\sigma},1)$. 显然有 $\varphi^*(\xi)\le\varphi(\xi)$, 对所有 ξ 成立. 由文 [2] 中定理 2.2 有

$$PC(T^*,T,\theta)=E_\varpi\big(P_\varpi(\widehat{\theta}_2>y(Z)|Z)I_{(\varphi^*(Z)<\varphi(Z))}\big)+\frac{1}{2}P_\varpi(\varphi^*(Z)=\varphi(Z)), \tag{2.2}$$

这里 P_ϖ 与 E_ϖ 分别为概率与期望记号, $y(\xi)$ 满足 $W(\varphi^*(\xi)y(\xi))=W(\varphi(\xi)y(\xi))$. 但如果 $\varphi^*(\xi)=\varphi(\xi)$ 那么 $y(\xi)$ 取为任意值. 又由定理条件知 $\varphi^*(\xi)<\varphi(\xi)\leftrightarrow\xi>0$, 且 $\frac{1}{mG(N\xi+1,R))}<\varphi(\xi)$. 于是由命题 2.4, $\varphi^*(\xi)=\frac{1}{m(\xi,0)}\ge\frac{1}{m(\xi,\frac{\mu}{\sigma})}$. 另外当 $\varphi^*(\xi)<\varphi(\xi)$ 时, 由文 [2] 中命题 2.1 知 $y(\xi)\le\frac{1}{\varphi^*(\xi)}$. 这样在集合 $\{\xi;\varphi^*(\xi)<\varphi(\xi)\}$ 内有 $y(\xi)<m\Big(\xi,\frac{\mu}{\sigma}\Big)$, 因此

$$P_\varpi(\widehat{\theta}_2>y(\xi)|Z=\xi)>P_\varpi\Big(\widehat{\theta}_2>m\Big(\xi,\frac{\mu}{\sigma}\Big)\mid Z=\xi\Big)=\frac{1}{2},$$

故

$$E_\varpi\Big(P_\varpi(\widehat{\theta}_2>y(Z)\mid Z)I_{(\varphi^*(Z)<\varphi(Z))}\Big)\ge\frac{1}{2}P_\varpi(\varphi^*(Z)<\varphi(Z)),$$

且如果 $P_\varpi(\varphi^*(Z)<\varphi(Z))>0$ 时, 不等号严格成立. 这样

$$PC(T^*,T,\theta)\ge\frac{1}{2}P_\varpi(\varphi^*(Z)\le\varphi(Z))=\frac{1}{2},$$

且当 $P_\theta(T^*\ne T)=P_\varpi(\varphi^*(Z)<\varphi(Z))>0$ 时, 不等号严格成立. 证毕.

定理 2.6 令

$$\varphi_0(\xi)=\begin{cases}a_0', & \text{当}\,\xi\le 0\,\text{时},\\ \min\Big\{a_0^*,\dfrac{1}{m(G(N\xi+1,R))}\Big\}, & \text{当}\,\xi>0\,\text{时},\end{cases}$$

那么 $PC(S_4,S_2,\theta)>\frac{1}{2}$, 对所有 θ 成立. 其中 $S_2=a_0'\widehat{\theta}_2$, $S_4=\varphi_0(Z)\widehat{\theta}_2$.

证 由定理 2.5 结论显然成立.

因此由定理 2.6 知 S_4 优于 S_2, 这样 S_2 又得到进一步改善.

3 σ^m 的分组定数截尾估计

在本节我们将第二节中的结论推广到 $\sigma^m\,(m\ne 0)$ 的情形.

仍假设损失函数为 $L(d,\theta)=W(\frac{d}{\sigma^m})$ 形式, $\theta=(\mu,\sigma)$ (对于用 d 估计 σ^m), 这里 $W(\cdot)$ 非负, 且满足第二节中的 A1 和 A2.

三种情形下的线性同变估计类分别为:

$$C_1'=\{a\widehat{\theta}_1^m;a>0\},\quad C_2'=\{a\widehat{\theta}_2^m;a>0\},\quad C_3'=\{a\widehat{\theta}_3^m;a>0\}.$$

这样下述结果的证明均类似于第二节中相应结论的证明, 所以仅给出结果, 不再加以证明.

设 $D_1=\{\varphi(Z)\widehat{\theta}_2^m;\varphi(\cdot)$ 非负，可测$\}$, $T_1=\varphi_1(Z)\widehat{\theta}_2^m, T_2=\varphi_2(Z)\widehat{\theta}_2^m$ 是 D_1 中两个估计量，那么用 $\widehat{\theta}_2^m$ 替代 (2.2) 式中 $\widehat{\theta}_2$ 即可得到

$$\begin{aligned}PC(T_1,T_2,\theta)=&E_\varpi(P_\varpi(\widehat{\theta}_2^m>y(Z)\mid Z)I_{(\varphi_1(Z)<\varphi_2(Z))})\\&+E_\varpi(P_\varpi(\widehat{\theta}_2^m<y(Z)\mid Z)I_{(\varphi_1(Z)>\varphi_2(Z))})\\&+\frac{1}{2}(P_\varpi(\varphi_1(Z)=\varphi_2(Z))),\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $y(Z)$ 满足

$$W(\varphi_1(z)y(z))=W(\varphi_2(z)y(z)),\tag{3.2}$$

$I_{(\cdot)}$ 为示性函数. 特别地当 $\varphi_1(Z)=a_1,\varphi_2(Z)=a_2$, 即 T_1,T_2 是 C_2' 中元素，且 $m>0$ 时有

$$PC(T_1,T_2,\theta)=\begin{cases}P(G(1,R-1)>y^{\frac{1}{m}}), & \text{当}\,0<a_1<a_2\,\text{时},\\ P(G(1,R-1)<y^{\frac{1}{m}}), & \text{当}\,a_1>a_2>0\,\text{时},\end{cases}\tag{3.3}$$

其中 y 满足 (3.2) 式，当 $m>0$ 时，(3.3) 式中不等号为相反不等号.

对于 C_2' 中元素，$T_1=a_1\widehat{\theta}_2^m, T_2=a_2\widehat{\theta}_2^m$, 则有，如果 ${a_0'}^m\le a_1<a_2$ 或 ${a_0'}^m\ge a_1>a_2$ 时，T_1 优于 T_2. 这里 a_0' 如前言所述. 作为结论，我们得到类似第二节中的如下定理.

定理 3.1 $S_2^m=(a_0',\widehat{\theta}_1)^m$ 是 C_2' 中 σ^m 的最优分组定数截尾估计.

所以第二种情形下 σ^m 的 MVUE 和 MLE 均是 (PC) 不可容许的.

定理 3.1′ $S_1^m=(a_0',\widehat{\theta}_1)^m$ 是 C_1' 中 σ^m 的最优分组定数截尾估计.

所以一种情形下 σ^m 的 MVUE 和 MLE 均是 (PC) 不可容许的.

定理 3.1″ $S_3^m=(a_0'',\widehat{\theta}_3)^m$ 是 C_3' 中 σ^m 的最优分组定数截尾估计.

所以三种情形下 σ^m 的 MVUE 和 MLE 均是 (PC) 不可容许的.

类似第二节，有对 S_2^m 改进的下面两个定理:

定理 3.2 对于 D_1 中任意估计量 $T=\varphi(Z)\widehat{\theta}_2^m$, 设

$$\varphi^*(\xi)=\begin{cases}\varphi(\xi), & \text{当}\,\xi\le 0\,\text{时},\\ \min\left\{\varphi(\xi),\dfrac{1}{[m(G(N\xi+1,R))]^m}\right\}, & \text{当}\,\xi>0\,\text{且}\,m>0\,\text{时},\\ \max\left\{\varphi(\xi),\dfrac{1}{[m(G(N\xi+1,R))]^m}\right\}, & \text{当}\,\xi>0,\,\text{且}\,m<0\,\text{时}\end{cases}$$

及 $T^*=\varphi^*(Z)\widehat{\theta}_2^m$, 那么 $PC(T^*,T,\theta)\ge\frac{1}{2}$ 对所有的 θ 成立，且当 $P_\theta(T^*\ne T)>0$ 时，不等式严格成立.

定理 3.3 σ^m 的估计量 ${S_4'}^m$ 要优于 S_2^m, 其中 ${S_4'}^m=\varphi_0(\xi)\widehat{\theta}_2^m$

$$\varphi_0(\xi)=\begin{cases}a_0'^m, & \text{当}\,\xi\le 0\,\text{时},\\ \min\left\{a_0'^m,\dfrac{1}{[m(G(N\xi+1,R))]^m}\right\}, & \text{当}\,\xi>0\,\text{且}\,m>0\,\text{时},\\ \max\left\{a_0'^m,\dfrac{1}{[m(G(N\xi+1,R))]^m}\right\}, & \text{当}\,\xi>0\,\text{且}\,m<0\,\text{时}.\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Pitman E J G. The closest estimates of statistical parameter. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1937, **33**: 212–222.
[2] Staavros Kourouklis. Estiming power of the scale parameter of an exponential distribution with unknown location under Pitman's measure of closeness. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1995, **48**: 185–195.
[3] 黄言军，宋立新，翟尚巍. Pitman 准则下指数分布刻度参数幂的定数截尾估计. 吉林大学自然科学学报，1998, (1): 9–13.
[4] Epstein B and Sobel M. Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. *Ann. Math. Statist.*, 1954, **24**: 373–381.
[5] Khattree R. Estimation of guarantee time and mean life after warranty for two-parameter exponential failure model. *Austral. J. Statist.*, 1992, **34**: 207–215.
[6] Groenereld R A and Meeden G. The mode, median and mean inequality. *Amer. Statist.*, 1977, **31**: 120–121.

GROUPED TYPE-II CENSORING ESTIMATORS OF POWERS OF THE SCALE PARAMETERS OF EXPONENTIAL DISTRIBUTION UNDER PITMAN'S MEASURE OF CLOSENESS

Huang Yanjun Lai Min Song Lixin

(*Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130023)

Abstract For the estimated function σ^m with σ being the scale parameter of exponential distribution, we give the corresponding grouped type-II censoring estimators for three cases under Pitman's measure of closeness. At the same time, we also find out the optimal estimators in the class of Location-Scale linear equivariant estimators.

Key words Pitman's measure of closeness, adimissibility linear equivariant estimators, groupwise type II censoring.